

תקציר מתמטי

1. פונקציות של משתנה אחד

• יסודות

(א) סימון: $y = f(x)$ כאשר x הינו משתנה מסביר ו- y משתנה מוסבר.

(ב) דוגמאות:

(פונקציה לינארית) $y = 3 + 4x$ -

(פונקציה ריבועית) $y = 3 + 4x + 5x^2$ -

(פולינום כללי) $y = 3x^3 + 4x + 5x^2 - 7$ -

$y = e^{2x}$ -

$y = x + \frac{1}{x}$ -

(ג) כללים:

$y = x^2 x^3 = x^5$ -

$y = \frac{x^5}{x^2} = x^3$ -

$y = (x^2)^3 = x^6$ -

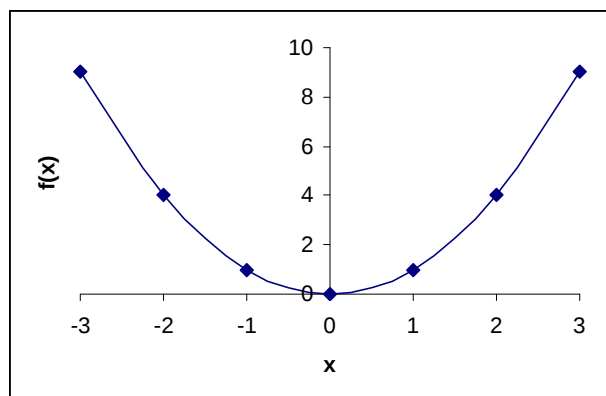
$y = x^2 x^3 = x^5$ -

• נגזרות

נגזרת של פונקציה $y = f(x)$ מודדת את השינוי ב- y כתוצאה משינוי קטן ב- x . במקרה של פונקציה עם משתנה מסביר אחד, הנגזרת של $f(x)$ משקפת את שיפוע הפונקציה.

דוגמא: $y = x^2$

הנגזרת: $y' = f'(x) = 2x$



x	$f(x)$	$f'(x)$
-3	9	-6
-2	4	-4
-1	1	-2
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6

שימו לב: בדוגמא הספציפית הזו, שינויים במשתנה המסביר משנים גם את הפונקציה וגם את הנגזרת.

שאלה: מה השיפוע של הפונקציה בנקודה $x = 2$?

שיפוע הקטע הישר בין $x = 1$ לבין $x = 2$ הינו 3.
שיפוע הקטע הישר בין $x = 2$ לבין $x = 3$ הינו 5. לכן הגיוני שהשיפוע בנקודה $x = 2$ יהיה בין 3 ל-5.

שיפוע הקטע הישר בין $x = 1.5$ לבין $x = 2$ הינו 3.5

$$\left[\frac{2^2 - 1.5^2}{0.5} = \frac{4 - 2.25}{0.5} = \frac{1.75}{0.5} = 3.5 \right]$$

שיפוע הקטע הישר בין $x = 2$ לבין $x = 2.5$ הינו 4.5

$$\left[\frac{2.5^2 - 2^2}{0.5} = \frac{6.25 - 4}{0.5} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5 \right]$$

שיפוע הקטע הישר בין $x = 1.75$ לבין $x = 2$ הינו 3.75

$$\left[\frac{2^2 - 1.75^2}{0.25} = \frac{4 - 3.0625}{0.25} = \frac{0.9375}{0.25} = 3.75 \right]$$

שיפוע הקטע הישר בין $x = 2$ לבין $x = 2.25$ הינו 4.25

$$\left[\frac{2.25^2 - 2^2}{0.25} = \frac{5.0625 - 4}{0.25} = \frac{1.0625}{0.25} = 4.25 \right]$$

ככל שמקטינים את המרחק מהנקודה $x = 2$, מתכנסים אל השיפוע האמיתי באותה נקודה.

באופן כללי:

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

בדוגמא לעיל, $x_0 = 2$ ו- Δx הולך וקטן מ-1 ל-0.5 ל-0.25 וכו', והשיפוע מתכנס לנגזרת $f'(x) = 4$.

• כללי גזירה

- קבועים: אם $f(x) = c$ אז $f'(x) = 0$

- פולינומים: אם $f(x) = x^b$ אז $f'(x) = bx^{b-1}$

אם $f(x) = ax^b$ אז $f'(x) = abx^{b-1}$

אם $f(x) = ax^b - c$ אז $f'(x) = abx^{b-1}$

- לוגים טבעיים: אם $f(x) = \ln x$ אז $f'(x) = \frac{1}{x}$

- פונקציות אקספוננציאליות: אם $f(x) = a^x$ אז $f'(x) = a^x \ln a$

אם $f(x) = e^x$ אז $f'(x) = e^x$

- סכום של פונקציות: אם $f(x) = g(x) + h(x)$ אז $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

- כפל פונקציות: אם $f(x) = g(x)h(x)$ אז

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

- חילוק פונקציות: אם $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ אז

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

בכל אחד מה"ל, תופס "כלל השרשרת": אם $y = f(x)$ ו- $x = g(z)$, כלומר $y = f[g(z)]$,

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} \quad \text{אז}$$

לדוגמא: אם $f(z) = e^{-3z}$ אז $f'(x) = -3e^{-3z}$

• מקסימיזציה ללא מגבלות

(א) תנאי מסדר ראשון

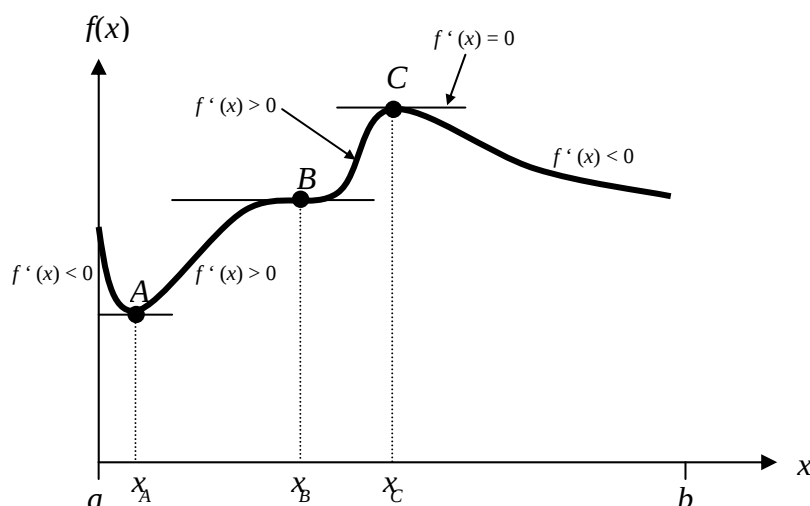
הניחו שהפונקציה $y = f(x)$ ניתנת לגזירה – כלומר היא חלקה ורציפה (smooth and continuous). הניחו גם כי ישנו x_0 הנמצא בתוך החלק הפנימי של הקטע $[a, b]$, כלומר $a < x_0 < b$.

אם $\frac{dy}{dx} = 0$ כאשר $x = x_0$, אז יתכן שהפונקציה נמצאת בנקודת מקסימום או נקודת מינימום. במילים אחרות, $\frac{dy}{dx} = 0$ הינו תנאי מסדר ראשון למקסימום או מינימום של הפונקציה.

(ב) הערות

- ההיפך אינו בהכרח נכון. כלומר, לא כל נקודה בתוך הקטע $[a, b]$ המאופיינת על ידי $\frac{dy}{dx} = 0$ הינה בהכרח נקודת מקסימום או מינימום. יתכן וזו נקודת פיתול (inflection point). לכן, התנאי מסדר ראשון הינו תנאי הכרחי למקסימום או מינימום, אך הוא אינו תנאי מספיק. קביעה זו נעשית על ידי הנגזרת השנייה: $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$ נקודת מקסימום; $y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} > 0$ נקודת מינימום.

- התנאי מסדר ראשון תופס רק אם x נמצא בתוך הקטע. אם נקודת המקסימום נמצאת באחת מנקודות הגבול, אזי התנאי $\frac{dy}{dx} = 0$ לא בהכרח מתקיים.



$$y = 3, x = 5 \Leftarrow y' = 2(5 - x) = 0 \Leftarrow y = 3 + (5 - x)^2 : \text{דוגמא למציאת נקודת המקסימום}$$

2. פונקציות רבות משתנים

• יסודות

(א) סימון: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ כאשר ישנם n משתנים מסבירים.

(ב) דוגמא:

$$(n=3) \quad y = 3x_1 + 2x_2x_3 - \frac{1}{x_3}$$

(ג) כללים:

$$y = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 \quad -$$

$$y = \frac{x_1^2}{x_2^2} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 \quad -$$

• נגזרות

(א) נגזרת חלקית

כאן נעזרים במושג של "נגזרת חלקית" אשר מודדת את השינוי ב- y כאשר משתנה רק אחד מה- x -ים בזמן שאין שינוי בכל השאר. ישנה נגזרת חלקית עבור כל אחד מהמשתנים המסבירים.

סימון של נגזרת חלקית: $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ עבור כל x_i , $i = 1, \dots, n$

חישוב הנגזרת החלקית מתייחס לכל שאר המשתנים כאילו היו קבועים.

(ב) נגזרת מלאה

נגזרת מלאה נותנת קירוב לשינוי המלא ב- y כאשר חל שינוי קטן בחלק, או בכל אחד מהמשתנים המסבירים. ככל ששינויים אלה קטנים יותר, הקירוב מדויק יותר.

$$\text{סימון של נגזרת מלאה: } dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$$

כאשר dx_1 משקף את גודל השינוי ב- x_1 ו- $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ משקף את השינוי ב- y עבור שינוי נתון ב- x_1 . הכפל בין השניים נותן את סך השינוי ב- y עבור סך השינוי ב- x_1 . כך גם עבור x_2 , כאשר $\frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2$ נותן את סך השינוי ב- y עבור סך השינוי ב- x_2 . כאשר סוכמים את כל המרכיבים השונים, מקבלים את השינוי המלא ב- y .

- **מקסמיזציה ללא מגבלות**

(א) תנאים מסדר ראשון

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0$$

כמו בדוגמא של משתנה מסביר אחד, מחשבים את כל אחד מהתנאים הנ"ל עבור הפונקציה y כדי למצוא את ערכי ה- x_i שמביאים את y למקסימום (או מינימום).

(ב) אינטואיציה

מספיק שרק אחד מה- $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ לא יהיה שווה ל-0 כדי שלא נהיה במקסימום. אם זה חיובי (לדוגמא), אז גידול ב- x_i יגדיל את y .

דוגמא: פונקציה עם שני משתנים מסבירים, כלומר $y = f(x_1, x_2)$. ניתן להשוות את הפונקציה להר, כאשר x_1 מודד את קו הרוחב, x_2 את קו האורך, ו- y את גובה ההר. אם נמצאים בפסגה, אז צעד קטן מאוד בכל כיוון לא יביא לשינוי בגובה. אך אם לא נמצאים בפסגה, תמיד ניתן למצוא כיוון שצעד אחד ישנה את הגובה.

- **מקסמיזציה עם מגבלות**

בעיות מסוג זה הינן השכיחות בכלכלה. לדוגמא, פירמה מעוניינת למקסם את רווחיה אך היא מוגבל על ידי טכנולוגית הייצור. בעיות כאלה פותרים בעזרת שיטת לגרנג'.

דוגמא לשיטת לגרנג'

המטרה: הבאת פני שטח של צילינדר למינימום תחת מגבלה שהצילינדר יכול נפח מסויים (12 ליטרים) של נוזל.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \text{נוסחת פני שטח של צילינדר}$$

$$V = \pi r^2 h \quad \text{נוסחת נפח של צילינדר}$$

כאשר r מודד את הרדיוס ו- h מודד את הגובה.

הצגה פורמלית של הבעיה כאשר הנפח שווה ל 12 ליטרים:

$$\min_{\{r,h\}} 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$\text{s.t. } \pi r^2 h = 12$$

פתרון הבעיה

$$L(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \lambda(12 - \pi r^2 h) \quad \text{משוואת ה-Lagrangian:}$$

תנאים מסדר ראשון:

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h - 2\lambda\pi r h = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial h} = 2\pi r - \lambda\pi r^2 = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - \pi r^2 h = 0$$

$$(4) \quad \lambda = \frac{2}{r} \quad \text{ממשוואה (2) מקבלים}$$

$$(5) \quad h = 2r \quad \text{הצבת (4) ב-(1) נותנת}$$

הצבת (5) ב-(3) נותנת את התשובות הסופיות:

$$r = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$h = 2\left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

הערה: דוגמאות למוצרים הבאים באריזה של צילינדר: בירה, צבע, משחת נעלים וכד'.

האם כל אלה נמכרים בגדלים "הנכונים"? מדוע כן או לא?